UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

SOLUCIONES EXACTAS DE UN MODELO MATEMÁTICO QUE DESCRIBE EL COMPORTAMIENTO DEL MEDIO VISCOELÁSTICO

Trabajo de fin de máster presentado por

Almudena del Pilar Márquez Lozano

Tutora: María de los Santos Bruzón Gallego

Firma de la alumna Firma de la tutora

Puerto Real, Cádiz, Julio de 2.016

Abstract

This work analyses a mathematical model described by a partial differential equation describing the behaviour of the one-dimensional viscoelastic medium. To do this the symmetries of this equation are studied in order to reduce the partial differential equation to ordinary differential equations to obtain exact solutions of it.

The analysis of the classic symmetries consist of the application of the Lie groups theory of infinitesimal transformations. In particular, it focus on applying the Lie classic method. Furthermore, the application of this method is about the classification of the classic symmetries, the calculus of optimal systems of Lie subalgebras and the obtaining of variables and solutions of similarity. Afterwards, the reduction of the partial differential equation to ordinary differential equations is done to obtain exact solutions.

Theoretical contents of the Lie groups theory are provided for the understanding of this work.

A mis padres.

A mi hermano.

Resumen

En este trabajo se analiza un modelo matemático descrito por una ecuación en derivadas parciales que describe el comportamiento unidimensional del medio viscoelástico. Para ello, se estudian las simetrías de esta ecuación con el principal objetivo de reducir la ecuación en derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias y obtener soluciones exactas de ella.

El análisis de las simetrías clásicas consiste en la aplicación de la teoría de los grupos de Lie de transformaciones infinitesimales. En concreto, se trata de aplicar el método clásico de Lie. Inherente a la aplicación de este método es la clasificación de las simetrías clásicas, el cálculo de los sistemas óptimos de subálgebras de Lie y la obtención de variables y soluciones de similaridad. A partir de ello, finalmente, la reducción de la ecuación en derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias para el cálculo de soluciones exactas.

Se ilustran los conceptos teóricos de la teoría de los grupos de Lie necesarios para la comprensión de este trabajo.

Agradecimientos

A todos los profesores que me han impartido clases durante el máster, gracias por la formación y por la ayuda prestada.

A mi tutora, María de los Santos Bruzón Gallego, por todo su tiempo, su amabilidad, su confianza depositada en mí y sobre todo, por haberme tratado como a una hija. Se ha convertido en una persona de referencia para mi formación profesional y lo más importante, como persona trabajadora y generosa.

A mis padres, por su paciencia, su constante apoyo y su lucha siempre por mí. Mamá, gracias por toda tu fuerza transmitida de manera incondicional.

A mi hermano, por su habilidad para sacar lo mejor de mí y sacarme siempre la mejor de mis sonrisas.

Agradecer también a mis compañeros que han estado junto a mí todo este curso, por todos esos ánimos y ese apoyo. En especial, a Isaías y Manuel, por ser los mejores compañeros que se puede tener, por vuestra simpatía y por hacer cada momento más ameno.

Almudena del Pilar Márquez Lozano
julio 2016

Índice general

CAPITULO

1

Introducción

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) es uno de los problemas más importantes de la matemática aplicada. Muchos procesos físicos pueden ser descritos en términos de ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Hasta ahora no se conoce un método general para resolver EDOs ni EDPs no lineales.

Sin embargo, la teoría de Lie nos permite dar soluciones a estas ecuaciones mediante los grupos de transformaciones de Lie. A finales del siglo XIX, el matemático noruego Sophus Lie introdujo propiedades para los grupos uniparamétricos y así sucedió el estudio de los grupos de Lie.

Lie descubrió que los métodos conocidos para resolver ecuaciones diferenciales eran casos particulares de un método general de integración basado en la invarianza de sistemas de ecuaciones diferenciales bajo un grupo continuo de simetrías.

El método clásico de Lie determina las simetrías de una EDO o EDP dada. Para ello, calcula el grupo uniparamétrico de transformaciones, llamadas simetrías clásicas, que dejan invariante la ecuación y transforma el conjunto de soluciones en soluciones. Un grupo de simetrías permite reducir el número de variables que intervienen en una EDP, o bien reducir el orden de una EDO.

En este trabajo se utiliza la notación donde ∂_x denota $\dfrac{\partial}{\partial x}$, etc; h' denota $\dfrac{\partial h}{\partial x}$; f_{xx} denota $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,y f_{yx} denota $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

El objetivo de este trabajo es estudiar las simetrías de la ecuación en derivadas parciales no lineal

$$u_{xx} + cu_{xxt} = g(u)_{tt}, \tag{1.1}$$

donde $u(x,t)$ es la tensión en el punto x y en tiempo t, g es una función no lineal y $c \in \mathbb{R}$, con $c > 0$, es una constante.

La ecuación 1.1 es una ecuación en derivadas parciales no lineal unidimensional en u. A continuación, se procede a la deducción de esta ecuación.

En ausencia de fuerzas exteriores, la ecuación del movimiento viene dada por

$$\rho d_{tt} = u_x \Rightarrow d_{tt} = \frac{u_x}{\rho}, \tag{1.2}$$

donde ρ es la densidad del medio, $d(x,t)$ es el desplazamiento y $u(x,t)$ la tensión.

Existe la siguiente ecuación que relaciona la tensión, la deformación lineal y la velocidad de deformación:

$$\epsilon + c\epsilon_t = g(u), \tag{1.3}$$

donde se expresa la deformación lineal $\epsilon = d_x$ y la velocidad de deformación ϵ_t como una función no lineal de la tensión u. Así, la ecuación 1.3 se transforma en

$$d_x + cd_{xt} = g(u).$$

Derivando dos veces respecto a t se tiene

$$d_{xtt} + cd_{xttt} = g(u)_{tt}.$$

Finalmente, haciendo uso de 1.2 se obtiene la ecuación 1.1.

Otra forma de obtener la ecuación 1.1 es definiendo, por conveniencia, las variables adimensionales

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{\mu}, \quad \bar{d} = \frac{d}{L},$$

donde L es una longitud característica y μ es una constante con la dimensión de la tensión. A partir de 1.2, se tiene

$$[\rho]\frac{[d]}{[t]^2} = \frac{[u]}{[x]} \Rightarrow [\rho]\frac{[L]}{[t]^2} = \frac{[\mu]}{[L]}$$

y despejando,

$$[t]^2 = \frac{[\rho][L]^2}{[\mu]} \Rightarrow [t] = [L]\left[\frac{\rho}{\mu}\right]^{1/2}.$$

Por otro lado, haciendo uso de 1.3, se tiene

$$[\epsilon] = [c]\frac{[\epsilon]}{[t]} \Rightarrow [c] = [t] = [L]\left[\frac{\rho}{\mu}\right]^{1/2}.$$

Entonces, se definen las variables adimensionales

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{\mu}, \quad \bar{d} = \frac{d}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \bar{c} = \frac{c}{L}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{1.4}$$

Derivando ambos lados de 1.2 respecto a x, sustituyendo 1.3 en la ecuación resultante y utilizando 1.4 se obtiene 1.1.

La ecuación 1.1 describe el comportamiento del medio viscoelástico unidimensional. Por ello, vamos a introducir las bases de la viscoelasticidad. Se puede encontrar más información sobre los conceptos que se van a presentar en [12].

La viscoelasticidad es un tipo de comportamiento reológico anelástico que presentan ciertos materiales que exhiben tanto propiedades viscosas como propiedades elásticas cuando se deforman.

Por un lado, la reología es la parte de la física que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación en los materiales que son capaces de fluir. Por otro lado, la anelasticidad se refiere a cualquier comportamiento de la mecánica de sólidos en el cual la tensión en instante no es una función exclusivamente de las deformaciones instantáneas del sólido. Es decir, el comportamiento anelástico requiere variables adicionales diferentes de la deformación instantánea, a diferencia de lo que sucede en el comportamiento elástico.

Un sólido viscoelástico presenta las siguientes propiedades:

- La deformación generalmente depende del tiempo; aún en ausencia de fuerzas, la velocidad de deformación puede ser diferente de cero.

- Las tensiones y esfuerzos resistidos dependen tanto de la deformación como de la velocidad de deformación.

Para visualizar en una dimensión se a de pensar en una barra alargada, con un punto final fijado a la pared, como se puede ver en la figura 1.1.

Consideramos la tensión como cómo de fuerte se tira de la barra y la deformación como cuánto se ha deformado la barra. Si la barra está hecha de acero la tensión que se ejerce no es muy grande pero si está hecha de goma suave sí lo es. La proporción entre la tensión y

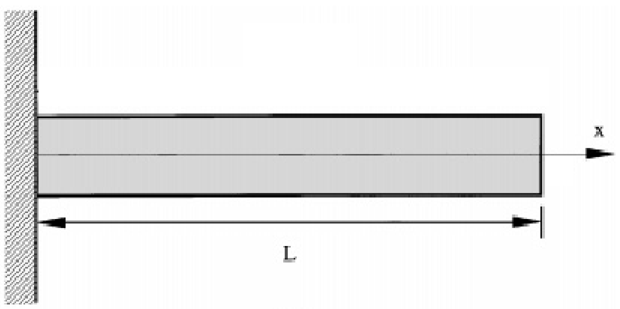

Figura 1.1: Barra para visualizar la tensión en una dimensión.

la deformación es la rigidez del material. Obviamente, esta es mucho mayor para el acero que para la goma.

Para un material elástico la relación entre la tensión y la deformación se expresa como

$$\sigma = \sigma(\varepsilon).$$

Para un material elástico linealmente, la tensión es linealmente proporcional a la deformación y la constante de proporcionalidad es el coeficiente de elasticidad E del material (figura 1.2). Luego, la tensión se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Materiales elásticos muestran una independecia respecto al tiempo en el comportamiento del material, ya que se deforman instantáneamente cuando están sujetos a fuerzas externas.

Existe un grupo de materiales, casi todos materiales biológicos, que presentan una deformación y recuperación gradual cuando están sujetos a carga y descarga. La respuesta de estos materiales depende de cómo de rápido la carga ha sido aplicada o retirada, el alcance de deformación depende de la velocidad con la que se ha aplicado. Esta dependencia con respecto al tiempo del comportamiento del material se llama viscoelasticidad.

La viscosidad es una propiedad de los fluidos y una medida de resistencia para fluir. Sin embargo, la elasticidad es una propiedad de los materiales sólidos.

Figura 1.2: Comportamiento lineal de material elástico.

Para materiales viscoelásticos la relación entre la tensión y la deformación se expresa como

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}). \tag{1.5}$$

La ecuación 1.5 muestra que la tensión, σ, no es sólo una función de deformación, ε, sino que es también una función de la velocidad de deformación, $\dot{\varepsilon} = \dfrac{d\varepsilon}{dt}$, donde t es el tiempo. Esta ecuación 1.5 a su vez indica que el diagrama tensión-deformación de un material viscoelástico no es único ya que depende de la velocidad con la que la deformación se ha aplicado en el material (figura 1.3).

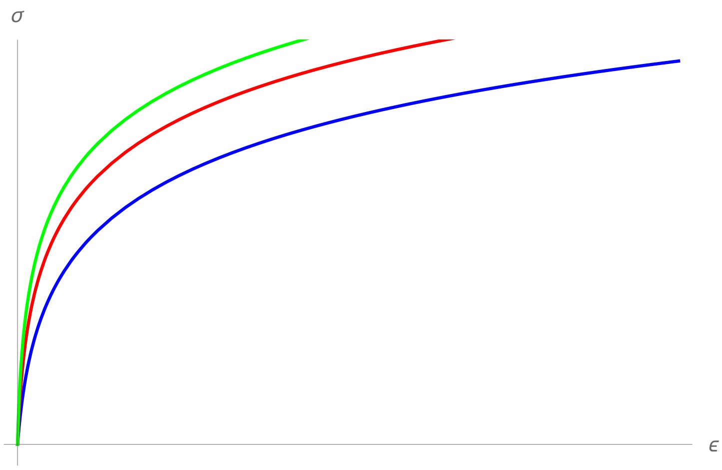

Figura 1.3: Comportamiento viscoelástico dependiente de la velocidad de deformación ($\dot{\varepsilon}$).

Comparación entre elasticidad y viscoelasticidad

Un material elástico presenta una única relación entre tensión y deformación que es independiente del tiempo o de la velocidad de deformación.

Para un cuerpo elástico, como se puede ver en la figura 1.4, esa función representa los caminos de carga y descarga, los cuales coinciden. Esto indica que no hay pérdida de energía durante la carga y descarga.

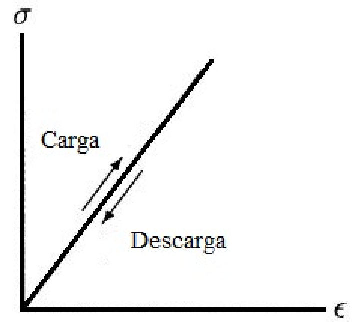

Figura 1.4: Para un material elástico, los caminos de carga y descarga coinciden.

Sin embargo, para un cuerpo viscoelástico algo de la energía de deformación se conserva en el cuerpo como energía potencial y algo de ella se disipa como calor.

El área que forma el camino de carga y descarga se llama curva de histéresis, la cual representa la energía disipada como calor durante la deformación y la recuperación. Este área y consecuentemente la cantidad de energía disipada como calor, depende de la velocidad de deformación utilizada para deformar el cuerpo.

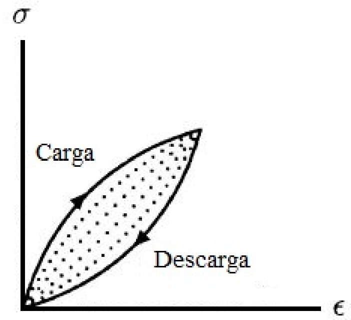

Figura 1.5: Curva de histéresis.

El principal objetivo del trabajo es calcular las simetrías de la ecuación 1.1. En primer lugar, en el capítulo 2 se ven los conceptos fundamentales basados en la teoría de Lie, la cual tiene un papel muy importante en el mundo de la física teórica, ya que permite hallar soluciones de ecuaciones que describen fenómenos físicos.

A continuación, el capítulo 3 se centra en el proceso a desarrollar. En primer lugar, se clasifican las simetrías de Lie de la ecuación 1.1 y se estudia el tipo de funciones g para las que esta ecuación es invariante bajo un grupo de Lie de transformaciones locales. Posteriormente, se calcula el álgebra de simetrías de Lie y se obtiene el sistema óptimo unidimensional de subálgebras. Entonces, se hallan las soluciones de similaridad para cada una de las subálgebras y se reduce la EDP 1.1 a EDO.

Para finalizar el trabajo, se incluyen algunas conclusiones a las que se llegan a partir de todo el análisis realizado.

CAPITULO

2

Grupos de simetrías de ecuaciones diferenciales

Una gran variedad de fenómenos están gobernados por EDOs y EDPs pero no existe un método general para su resolución. La resolución de ecuaciones diferenciales es uno de los problemas más importantes de la matemática aplicada y la física matemática. En el curso del tiempo se fueron desarrollando diversos métodos de integración para resolver clases especiales de ecuaciones diferenciales que ocurren en la descripción de fenómenos físicos. Entre estos métodos destaca el método clásico de Lie que permite lo siguiente:

- Reducir el número de variables independientes de las EDPs.
- Reducir el orden de EDOs.
- Obtener nuevas soluciones a partir de las ya conocidas.
- Clasificar las ecuaciones en clases de equivalencia.
- Encontrar leyes conservativas.

Destaca por ser uno de los métodos más eficientes para obtener soluciones exactas de EDPs. A continuación, se describen los conceptos fundamentales para el desarrollo de este método.

Por último, indicar que en [1], [2], [3], [4] y [11] se pueden encontrar las demostraciones de los principales resultados que aparecen a continuación y que, por motivos de longitud del trabajo, no se reproducen.

2.1 Grupos de Lie de transformaciones

Desde el punto de vista de encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales una teoría general de los grupos de Lie de transformaciones es innecesaria si las transformaciones se restringen a escalas, traslaciones o rotaciones. Es cierto que muchos más tipos de transformaciones dejan invariante a las ecuaciones diferenciales, incluidas las transformaciones tipo escalas, traslaciones y rotaciones. Para el uso de estas transformaciones la teoría de Lie es crucial. En particular, la caracterización de dichas transformaciones en términos de generadores infinitesimales, que forman un álgebra de Lie.

Definición 2.1. Un grupo G es un conjunto de elementos con una ley de composición ϕ entre elementos que satisface los siguientes axiomas:

(i) Propiedad de clausura: Para cada elementos a y b de G, $\phi(a, b)$ es un elemento de G.

(ii) Propiedad asociativa: Para cada elementos a, b y c de G,

$$\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c).$$

(iii) Elemento identidad: Existe un único elemento identidad e de G tal que para cada elemento a de G,

$$\phi(a, e) = \phi(e, a) = a.$$

(iv) Elemento inverso: Para cada elemento a de G existe un único elemento inverso a^{-1} en G tal que

$$\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e.$$

Definición 2.2. Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en la región $D \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto de transformaciones

$$x^* = X(x; \epsilon)$$

definido para cada x en D, dependiendo del parámetro ϵ del conjunto $S \subset \mathbb{R}$ con $\phi(\epsilon, \delta)$ una ley de composición de parámetros ϵ y δ en S que forma un grupo de transformaciones en D si

(i) Para cada parámetro ϵ en S las transformaciones están una a una en D. En particular, x^* está en D.

(ii) S con ley de composición ϕ forma un grupo G.

(iii) $x^* = x$ cuando $\epsilon = e$, i.e. $X(x; e) = x$.

(iv) Si $x^* = X(x; \epsilon)$, $x^{**} = X(x^*; \delta)$, entonces

$$x^{**} = X(x; \phi(\epsilon, \delta)).$$

2.1.1 Grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones

Definición 2.3. Un grupo de transformaciones define un grupo de Lie uniparamétrico si además de cumplir la definición 2.2 se cumple que

(v) ϵ es un parámetro continuo, i.e., S es un intervalo en $\mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad $\epsilon = 0$ corresponde con el elemento identidad e.

(vi) X es C^∞ respecto a x en D y una función analítica de ϵ en S.

(vii) $\phi(\epsilon, \delta)$ es función analítica de ϵ y δ, $\epsilon \in S$, $\delta \in S$.

Definición 2.4. Sea M una variedad diferenciable, un campo vectorial v es una aplicación diferenciable entre puntos x de M y vectores tangentes en x.

Definición 2.5. Una curva integral de un campo vectorial v es una curva parametrizada $\alpha : I \to M$, $t \to \alpha(t)$ con $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$, I abierto, donde su tangente en cualquier punto coincide con el valor de v en ese punto, es decir, $\alpha'(t) = \mathrm{v}|_{\alpha(t)}$.

2.2 Transformaciones infinitesimales

Sea un grupo de Lie uniparamétrico (ϵ) de transformaciones

$$x^* = X(x; \epsilon), \tag{2.1}$$

con identidad $\epsilon = 0$ y ley de composición ϕ.

Desarrollando 2.1 sobre $\epsilon = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \epsilon}(x; \epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} \right) + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \epsilon^2}(x; \epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} \right) + ... \\ &= x + \epsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \epsilon}(x; \epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sea

$$\xi(x) = \frac{\partial X}{\partial \epsilon}(x; \epsilon)\bigg|_{\epsilon=0}. \tag{2.3}$$

La transformación $x + \epsilon\xi(x)$ se denomina transformación infinitesimal del grupo de Lie de transformaciones 2.1. Las componentes de $\xi(x)$ se llaman infinitesimales de 2.1.

2.2.1 Primer teorema fundamental de Lie

En primer lugar, se tiene el siguiente lema previo:

Lema 2.1.
$$X(x;\epsilon+\Delta\epsilon) = X(X(x;\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)).$$

Teorema 2.1. *(Primer teorema fundamental de Lie)*
Existe una parametrización $\tau(\epsilon)$ tal que el grupo de Lie de transformaciones 2.1 es equivalente a la solución del P.V.I. del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
$$\frac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*),$$
con
$$x^* = x \quad \textit{cuando} \quad \tau = 0.$$
En particular,
$$\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon')d\epsilon',$$
donde
$$\Gamma(\epsilon) = \left.\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)}$$
y
$$\Gamma(0) = 1$$
[ϵ^{-1} denota el elemento inverso de ϵ].

2.2.2 Generadores infinitesimales

Dado el primer teorema fundamental de Lie 2.1, de aquí en adelante, sin pérdida de generalidad, se asume que un grupo de Lie uniparamétrico (ϵ) de transformaciones es parametrizado de forma que su ley de composición es $\phi(a+b) = a+b$ y entonces $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ y $\Gamma(\epsilon) \equiv 1$. Luego, en términos de sus infinitesimales $\xi(x)$ el grupo de Lie uniparamétrico 2.1 se convierte en
$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*),$$
con
$$x^* = x \quad \text{en} \quad \epsilon = 0.$$

Definición 2.6. El generador infinitesimal de un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones es el operador
$$X = X(x) = \xi(x)\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde ∇ es el operador gradiente,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right);$$

para cualquier función diferenciable $F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$XF(x) = \xi(x) \cdot \nabla F(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}.$$

2.2.3 Funciones invariantes

Definición 2.7. Una función $F(x)$ infinitamente diferenciable es una función invariante del grupo de Lie de transformaciones 2.1 si y sólo si para cualquier grupo de transformaciones 2.1

$$F(x^*) \equiv F(x).$$

Si $F(x)$ es una función invariante de 2.1, entonces $F(x)$ se llama invariante de 2.1 y $F(x)$ se dice que es invariante bajo 2.1.

Teorema 2.2. *$F(x)$ es invariante bajo 2.1 si y sólo si*

$$XF(x) = 0.$$

Teorema 2.3. *Para un grupo de Lie de transformaciones 2.1, la identidad*

$$F(x^*) \equiv F(x) + \epsilon$$

se tiene si y sólo si $F(x)$ cumple $XF(x) \equiv 1$.

2.2.4 Coordenadas canónicas

Supongamos que se hace un cambio de coordenadas

$$y = Y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)). \tag{2.4}$$

Para el grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones 2.1 el generador infinitesimal $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ respecto a las coordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ convierte el generador infinitesimal en

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

respecto a las coordenadas $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definidas por 2.4. Luego, $Y = X$ de forma que tengan el mismo grupo de acción. El infinitesimal con respecto a las coordenadas y es

$$\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), ..., \eta_n(y)) = Yy.$$

Definición 2.8. Un cambio de coordenadas 2.4 define un conjunto de coordenadas canónicas para el grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones 2.1 si en términos de dichas coordenadas el grupo se convierte en

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \\ y_n^* &= y_n + \epsilon. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Teorema 2.4. *Para cualquier grupo de Lie de transformaciones 2.1 existe un conjunto de coordenadas canónicas $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de forma que 2.1 es equivalente a 2.5.*

Teorema 2.5. *En términos de cualquier conjunto de coordenadas canónicas $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, el generador infinitesimal de un grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones 2.1 es*

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

2.3 Grupos de Lie multi-paramétricos de transformaciones; Álgebras de Lie

En las secciones anteriores de este capítulo se han considerado grupos de Lie uniparamétricos de transformaciones. En esta sección vamos a resumir algunos resultados claves sobre los grupos de Lie multi-paramétricos de transformaciones. Se asume un número finito r de parámetros. Cada parámetro de un grupo de Lie r-paramétrico de transformaciones corresponde con un generador infinitesimal.

2.3.1 Grupo de Lie r-paramétrico de transformaciones

Para un grupo de lie r-paramétrico de transformaciones

$$x^* = X(x; \varepsilon), \tag{2.6}$$

sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y sean los parámetros denotados por $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r)$. Sea la ley de composición de parámetros denotada por

$$\phi(\varepsilon, \delta) = (\phi_1(\varepsilon, \delta), \phi_2(\varepsilon, \delta), ..., \phi_r(\varepsilon, \delta)),$$

donde $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_r)$; $\phi(\varepsilon, \delta)$ satisface el grupo de axiomas con $\varepsilon = 0$ correspondiente a la identidad $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_r = 0$; $\phi(\varepsilon, \delta)$ se asume analítica en su dominio de definición.

Definición 2.9. El generador infinitesimal X_α, correspondiente con el parámetro ε_α del grupo de Lie r-paramétrico de transformaciones 2.6, es

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \alpha = 1, 2, ..., r. \tag{2.7}$$

2.3.2 Álgebras de Lie

Definición 2.10. Considera un grupo de Lie r-paramétrico de transformaciones 2.6 con generadores infinitesimales $\{X_\alpha\}, \alpha = 1, 2, ..., r$, definidos por 2.7. El conmutador (corchete de Lie) de X_α y X_β es otro operador de primer orden

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\xi_{\alpha i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\xi_{\beta j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right.$$
$$\left. - \left(\xi_{\beta i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\xi_{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde

$$\eta_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\xi_{\alpha i}(x) \frac{\partial \xi_{\beta j}(x)}{\partial x_i} - \xi_{\beta i}(x) \frac{\partial \xi_{\alpha j}(x)}{\partial x_i} \right].$$

Proposición 2.1. *El conmutador o corchete de Lie verifica las siguientes propiedades:*

1. *Bilinealidad:* $[aX_\alpha + bX_\beta, X_\gamma] = a[X_\alpha, X_\beta] + b[X_\beta, X_\gamma]$.
2. *Antisimetría:* $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\gamma]$.
3. *Identidad de Jacobi:* $[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0$.

Definición 2.11. Un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial sobre un campo $\mathcal{F}$ con una aplicación bilineal que verifica las propiedades de 2.1.
El conjunto de los campos vectoriales diferenciables $\{X_\alpha\}, \alpha = 1, 2, ..., r$, es un álgebra de Lie.

Definición 2.12. Un subespacio $J \subset \mathcal{L}$ se llama un subalgebra del álgebra de Lie $\mathcal{L}$ si para cualquier $X_\alpha, X_\beta \in J, [X_\alpha, X_\beta] \in J$.

Si G es un grupo de Lie, entonces hay distintos campos vectoriales en G caracterizados por su invarianza bajo la multiplicación de grupo. Estos campos vectoriales invariantes forman un espacio vectorial finito, llamado álgebra de Lie de G, que es el "generador infinitesimal" de G. De hecho, casi toda la información del grupo G está contenida en su álgebra de Lie.

Sea G un grupo de Lie. Para cualquier elemento del grupo $g \in G$, la multiplicación a la derecha

$$R_g : G \to G$$

definida por

$$R_g(h) = h \cdot g$$

es un difeomorfismo, con inversa

$$R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}.$$

Un campo vectorial v en G se dice que es invariante por la derecha si

$$dR_g(\mathrm{v}|_h) = \mathrm{v}|_{R_g(h)} = \mathrm{v}|_{hg},$$

para todo g y h en G. Si v y w son invariantes por la derecha, también lo es cualquier combinación lineal $a\mathrm{v} + bw, a, b \in \mathbb{R}$. Luego, el conjunto de todos los vectores invariantes por la derecha forman un espacio vectorial.

Definición 2.13. El álgebra de Lie de un grupo de Lie G, denotado por $\mathfrak{g}$, es el espacio vectorial de todos los campos vectoriales invariantes en G invariantes por la derecha.

En general, un subálgebra $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial cerrado bajo el corchete de Lie, por lo que, $[\mathrm{v}, w] \in \mathfrak{h}$ cuando $\mathrm{v}, w \in \mathfrak{h}$.

Teorema 2.6. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $H \subset G$ es un subgrupo de Lie, su álgebra de Lie es un subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

2.4 Simetrías de ecuaciones algebraicas

El grupo de simetrías de un sistema de ecuaciones diferenciales es el mayor grupo local de transformaciones actuando sobre las variables dependientes e independientes del sistema, con la propiedad de que transforma soluciones de un sistema en otras soluciones. Antes de entrar en el caso de ecuaciones diferenciales, es vital tratar con una situación más simple presentada por grupos de simetrías del sistema de ecuaciones algebraicas.

2.4.1 Funciones invariantes

En lugar de ver las simetrías del conjunto solución del sistema algebraico de ecuaciones, se pueden ver las simetrías de la función $F(x)$ que define el sistema.

Definición 2.14. Sea G un grupo local de transformaciones actuando en una variedad M. Una función $F : M \to N$, donde N es otra variedad, se llama una función G-invariante si para todo $x \in M$ y para todo $g \in G$ tal que $g \cdot x$ esté definida,

$$F(g \cdot x) = F(x).$$

2.4.2 Invarianza

La gran importancia de la teoría de los grupos de Lie cae sobre la crucial observación de que uno puede reemplazar las condiciones no lineales para la invarianza de un subconjunto o función bajo el grupo de transformaciones por una condición lineal equivalente de invarianza infinitesimal bajo los generadores infinitesimales correspondientes a la acción del grupo.

Proposición 2.2. *Sea G un grupo de transformaciones conectado actuando sobre la variedad M. Una función suave de valores reales $\zeta : M \to \mathbb{R}$ es una función invariante para G si y sólo si*

$$\mathrm{v}(\zeta) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in M,$$

y todo generador infinitesimal v *de G.*

Teorema 2.7. *Sea G un grupo actuando sobre la variedad M de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in M$, con $\mathrm{v}|_a \neq 0$, existe un entorno de a y $n-1$ invariantes locales $(\zeta^1(x), \zeta^2(x), ..., \zeta^{n-1}(x))$ funcionalmente independientes sobre M. Además, cualquier otro invariante de la acción del grupo definido en un entorno de a es funcionalmente dependiente de ellos.*

2.4.3 Métodos para construir invariantes

Es importante mostrar como se encuentran los invariantes de la acción del grupo dada. En primer lugar, se supone G un grupo uniparamétrico de transformaciones actuando en M, con generador infinitesimal

$$\mathrm{v} = \xi^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \xi^m(x)\frac{\partial}{\partial x^m}$$

expresado en coordenadas locales. Un invariante local $\zeta(x)$ de G es una solución de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\mathrm{v}(\zeta) = \xi^1(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + ... + \xi^m(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0. \tag{2.8}$$

El teorema 2.7 dice que si $\mathrm{v}|_x \neq 0$, entonces existe $m-1$ invariantes funcionalmente independientes, luego $m-1$ soluciones funcionalmente independientes de la ecuación en derivadas parciales 2.8 en un entorno de x_0.

La teoría clásica de dichas ecuaciones muestra que la solución general de 2.8 se encuentra integrando el correspondiente sistema característico de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que es

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = ... = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}.$$

2.5 Grupos y ecuaciones diferenciales; Prolongaciones

Sea S un sistema de ecuaciones diferenciales con p variables independientes $(x^1, x^2, ..., x^p)$, q variables dependientes $(u^1, u^2, ..., u^q)$ y las soluciones $u = f(x)$, es decir, $u^t = f^t(x^1, x^2, ..., x^p)$ con $t = 1, ..., p$.

Definición 2.15. Un grupo de simetrías del sistema S es un grupo local de transformaciones G actuando sobre el subconjunto abierto M del espacio de las variables dependientes e independientes del sistema, con la propiedad de que para cualquier solución $u = f(x)$ de S y para cada $g \in G$ tal que $g \cdot f$ esté definido, entonces $u = g \cdot f(x)$ es también solución del sistema.

Denotamos las derivadas parciales de f de orden k como

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} ... \partial x^{j_k}},$$

para $J = (j_1, j_2, ..., j_k) \in \{1, 2, ..., p\}$ distintos entre sí.

Definición 2.16. Dada una función $f : X \to U$, con $u = f(x)$, existe una función inducida $u^{(n)} = pr^{(n)} f(x)$, llamada n-prolongación de f, definida por las ecuaciones

$$u^{(n)} = \partial_J f^t(x), \quad |J| \leq n.$$

Las n-prolongación de f es la aplicación $x \to (f(x), f^1(x), ..., f^n(x))$.

Si el sistema S es de orden n, lo denotamos

$$\Delta_t(x, u^{(n)}) = 0, \quad t = 1, 2, ..., q,$$

luego, una solución del sistema es una función $u = f(x)$ tal que

$$\Delta_t(x, pr^{(n)} f(x)) = 0, \quad t = 1, 2, ..., q.$$

Sea G un grupo local de transformaciones actuando sobre un abierto M. Existe una acción local inducida de G sobre $M^{(n)}$, que denotaremos $pr^{(n)}G$ y llamaremos n-ésima prolongación de la acción G sobre M.

Si $g \in G$ está suficientemente cerca de la identidad, la función transformada $g \cdot f$ está definida en un entorno del punto $(\hat{x_0}, \hat{u_0}) = g \cdot (x_0, u_0)$, siendo $u_0 = f(x_0)$, entonces se puede determinar la acción del grupo de transformaciones prolongando $pr^{(n)}g$ sobre (x_0, u_0) de la siguiente forma:

$$pr^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) \equiv (\hat{x_0}, \hat{u_0}^{(n)}), \quad \hat{u_0}^{(n)} = pr^{(n)}(g \cdot f)(\hat{x_0}).$$

Definición 2.17. Sea S un sistema de ecuaciones diferenciales de orden n, se define la correspondiente subvariedad S_Δ de $M^{(n)}$ como

$$S_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}.$$

Teorema 2.8. *Sea $M \subset X \times U$ un abierto y $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ un sistema de ecuaciones diferenciales de orden n definido sobre M, cuya correspondiente subvariedad es $S_\Delta \subset M^{(n)}$. Sea G un grupo local de transformaciones actuando sobre M cuya prolongación deja S_Δ invariante, es decir,*

$$\Delta(x, u^{(n)}) \in S_\Delta, \quad pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in S_\Delta, \quad \forall g \in G.$$

Entonces G es un grupo de simetrías del sistema.

En lo que respecta a prolongación de campos vectoriales, se puede definir también la prolongación de los generadores infinitesimales correspondientes. Estos serán solamente los generadores infinitesimales de la acción del grupo prolongada.

Definición 2.18. Sea $M \subset X \times U$ abierto y supongamos v un campo vectorial en M, con su correspondiente grupo uniparamétrico $\exp(\epsilon \mathrm{v})$. La n-ésima prolongación de v, denotada por $pr^{(n)}\mathrm{v}$, es el campo vectorial sobre $M^{(n)}$ y se define como el generador infinitesimal del correspondiente grupo uniparamétrico $pr^{(n)}[\exp(\epsilon \mathrm{v})]$ prolongado. En otras palabras,

$$pr^{(n)}\mathrm{v}|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} pr^{(n)}[\exp(\epsilon \mathrm{v})](x, u^{(n)}),$$

para cualquier $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Teorema 2.9. *Sea*

$$\mathrm{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

un campo vectorial definido en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$. La n-ésima prolongación de v *es el campo vectorial*

$$pr^{(n)}\mathrm{v} = \mathrm{v} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$$

definido en el correspondiente espacio $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, el segundo sumatorio corresponde con multi-índices $J = (j_1, ..., j_k)$, con $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$. Las funciones coeficientes ϕ_α^J de $pr^{(n)}\mathrm{v}$ vienen dadas por la siguiente fórmula:

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = \partial_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{2.9}$$

donde $u_i^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$, $u_{J,i}^\alpha = \dfrac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}$, *y* $u_{J,i}^\alpha = \dfrac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i} = \dfrac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} ... \partial x^{j_k}}$.

Para aplicar los teoremas posteriores se necesita una condición de máximo rango para un sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.19. Sea

$$\Delta_\mathrm{v}(x, u^{(n)}) = 0, \quad \mathrm{v} = 1, ..., l,$$

un sistema de ecuaciones diferenciales. El sistema se dice que es de máximo rango si la matriz Jacobiana $l \times (p + qp^{(n)})$,

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\mathrm{v}}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\mathrm{v}}{\partial u_J^\alpha} \right)$$

de Δ con respecto a todas las variables $(x, u^{(n)})$ es de rango l cuando $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

A continuación, se define el criterio de invarianza, que permite determinar los infinitesimales de un campo vectorial v. Se aplica sustituyendo los infinitesimales en la ecuación característica e integrándola. De esta forma se obtienen las variables y soluciones de similaridad. Esta transformación reduce una EDP en una EDO.

Teorema 2.10. *(Criterio de invarianza)*
Sea $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ un sistema no degenerado de ecuaciones diferenciales. Un grupo local conectado de transformaciones G actuando sobre un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ es un grupo de simetrías del sistema si y sólo si

$$pr^{(n)}\mathrm{v}[\Delta_\mathrm{v}(x, u^{(n)})] = 0, \quad \mathrm{v} = 1, ..., l, \quad \textit{cuando} \quad \Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$

para todo generador infinitesimal v *de G.*

2.6 Clasificación de las soluciones invariantes

En general, para cada subgrupo H s-paramétrico del grupo de simetrías G de un sistema de ecuaciones diferenciales con $p > s$ variables independientes, le corresponderá una familia de soluciones invariantes. Ya que casi siempre hay un número infinito de subgrupos, no se listan todas las posibles soluciones invariantes. Se necesita una manera eficaz y sistemática que dirija a un "sistema óptimo" de soluciones invariantes a partir del cuál otra solución pueda ser hallada. Los elementos $g \in G$ que no están en el subgrupo H transformarán una solución H-invariante en otra solución invariante. Únicamente esas soluciones no tan relacionadas necesitan ser listadas en nuestro sistema óptimo. El resultado básico es el siguiente:

Proposición 2.3. *Sea G un grupo de simetrías del sistema de ecuaciones diferenciales Δ y sea $H \subset G$ un subgrupo s-paramétrico. Si $u = f(x)$ es una solución H-invariante de Δ y $g \in G$ es cualquier otro elemento del grupo, entonces la función transformada $u = \tilde{f}(x) = g \cdot f(x)$ es una solución $\tilde{H}$-invariante, donde $\tilde{H} = gHg^{-1}$ es el subgrupo conjugado de H bajo g.*

2.6.1 La representación adjunta

Sea G un grupo de Lie. Para cada $g \in G$, grupo de conjugación $K_g(h) \equiv ghg^{-1}$, $h \in G$, determina un difeomorfismo en G. Además, $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}, K_e = 1_G$, así K_g determina una acción del grupo global de G a sí mismo, con cada aplicación conjugada K_g un homeomorfismo de grupo: $K_g(h, h') = K_g(h)K_g(h')$, etc. La diferencial $dK_g : TG|_h \to TG|_{K_g(h)}$ conserva la invarianza por la derecha de campos vectoriales, y por tanto, determina una aplicación lineal en el álgebra de Lie de G, denominada la representación adjunta:

$$Ad\, g(v) \equiv dK_g(v), \quad v \in \mathfrak{g}.$$

Luego, encontrar un sistema óptimo de subgrupos es equivalente a encontrar un sistema óptimo de subálgebras.

Proposición 2.4. *Sea H y $\tilde{H}$ conectado, subgrupos de Lie s-dimensionales del grupo de Lie G con subálgebras de Lie correspondientes $\mathfrak{h}$ y $\tilde{\mathfrak{h}}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Entonces, $\tilde{H} = gHg^{-1}$ son subgrupos conjugados si y sólo si $\mathfrak{h} = Ad\, g(\mathfrak{h})$ son subálgebras conjugadas.*

La representación adjunta de un grupo de Lie en su álgebra de Lie se reconstruye más facilmente a partir de los generadores infinitesimales. Si v genera un subgrupo uniparamétrico $\{\exp(\epsilon \mathrm{v})\}$, entonces será $Ad\,\mathrm{v}$ el campo vectorial en $\mathfrak{g}$ que genera el correspondiente grupo uniparamétrico de transformaciones adjuntas

$$Ad\,\mathrm{v}|_w \equiv \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} Ad(\exp(\epsilon w))w, \quad w \in \mathfrak{g}.$$

Proposición 2.5. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Para cada $\mathrm{v} \in \mathfrak{g}$, el vector adjunto $Ad\,\mathrm{v}$ en $w \in \mathfrak{g}$ es*

$$Ad\,\mathrm{v}|_w = [w, \mathrm{v}] = -[\mathrm{v}, w].$$

Podemos reconstruir la representación adjunta $Ad\,G$ del grupo de Lie subyacente si sabemos la acción adjunta infinitesimal $Ad\,\mathcal{L}$ de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ sobre sí misma, sumando la serie de Lie:

$$Ad(\exp(\epsilon \mathrm{v}))w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!}(Ad\,\mathrm{v})(w_0) = w_0 - \epsilon[\mathrm{v}, w_0] + \frac{\epsilon^2}{2}[\mathrm{v}, [\mathrm{v}, w_0]] - ...$$

Definición 2.20. (Sistema óptimo de subgrupos)
Sea G un grupo de Lie. Un sistema óptimo de subgrupos s-paramétricos es una familia de subgrupos s-paramétricos tal que cualquier otro subgrupo s-paramétrico es conjugado de uno y sólo de uno de la familia. Una familia de subálgebras s-paramétrica forma un sistema óptimo si cada una de ellas es equivalente a un único elemento de la familia bajo algún elemento de la representación adjunta, es decir,

$$\tilde{\mathfrak{h}} = Ad\,g(\mathfrak{h}), \quad g \in G.$$

Definición 2.21. (Sistema óptimo de soluciones)
Un sistema óptimo de soluciones invariantes s-paramétricas es una familia de soluciones $u = f(x)$ con las siguientes propiedades:

(i) Cada solución en la familia es invariante bajo algún grupo de simetrías s-paramétrico del sistema de ecuaciones diferenciales.

(ii) Si $u = \tilde{f}(x)$ es cualquier otra solución invariante bajo un grupo de simetrías s-paramétrico, entonces existe una simetría g del sistema que aplica $\tilde{f}$ a una solución $f = g \cdot \tilde{f}$ de la familia.

2.7 Método clásico de Lie

Para aplicar el método clásico de Lie a la ecuación 1.1 se considera el grupo uniparamétrico de transformaciones en (x, t, u) dado por

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon p(x,t,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon q(x,t,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon r(x,t,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde ε es el parámetro del grupo. Entonces, se requiere que esta transformación deje invariante el conjunto

$$S_\Delta = \{u(x,t) : \Delta = 0\}$$

de soluciones de 1.1. Esto conduce a un sistema lineal sobredeterminado de ecuaciones determinantes para los infinitesimales $p(x,t,u)$, $q(x,t,u)$ y $r(x,t,u)$. Los campos vectoriales del álgebra de Lie $\mathcal{L}$ asociado son de la forma

$$\mathrm{v} = p(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + q(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + r(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.11}$$

Conocidos los infinitesimales, la solución de similaridad se calcula resolviendo la ecuación característica

$$\frac{dx}{p} = \frac{dt}{q} = \frac{du}{r},$$

lo que es equivalente a resolver la condición de superficie invariante

$$\Phi \equiv p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial t} - r.$$

El conjunto S_Δ es invariante bajo la transformación 2.10 cuando

$$pr^{(4)}\mathrm{v}(\Delta) = 0 \quad \text{si} \quad \Delta = 0,$$

donde $pr^{(4)}\mathrm{v}$ es la cuarta prolongación del campo vectorial 2.11, dada por

$$pr^{(4)}\mathrm{v} = \mathrm{v} + \phi^{[x]}\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{[xx]}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{[xxxx]}\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \phi^{[tt]}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

donde $\phi^{[x]}$, $\phi^{[xx]}$, $\phi^{[xxxx]}$ y $\phi^{[tt]}$ están dadas explícitamente en términos de p, q y r según la fórmula 2.9.

Las soluciones de similaridad, también denominadas reducciones por simetría o reducciones por similaridad, reducen la EDP 1.1 a EDO.

CAPITULO

3

Simetrías de un modelo de viscoelasticidad

En este capítulo se estudian las simetrías clásicas de la siguiente EDP descrita en la introducción:

$$u_{xx} + cu_{xxt} = g(u)_{tt}, \quad c > 0. \tag{3.1}$$

En primer lugar, se tiene una función $u = u(x,t)$, con u como variable dependiente y x, t como variables independientes. Por otro lado, se tiene una función g, que depende de la función u mencionada anteriormente.

Para la aplicación de la teoría de los grupos de Lie de transformaciones infinitesimales a la ecuación se ha utilizado el programa Symmprp.2009 y el software libre Maxima. Sin embargo, al final del proceso para hallar soluciones exactas además de Maxima, se hace uso de los softwares Mathematica y Maple.

Para este capítulo, indicar que se ha utilizado [5], [6], [7], [8], [9] y [10].

Antes de introducir la ecuación 3.1 en Maxima se le aplican algunas transformaciones. Partiendo de la ecuación inicial, si se deriva la función g se obtienen las siguientes expresiones:

$$g_t = g_u u_t$$

$$g_{tt} = g_{uu} u_t^2 + g_u u_{tt}$$

Denotando $h = g_{uu}$ y $f = g_u$, se tiene

$$u_{xx} + cu_{xxt} = hu_t^2 + fu_{tt}$$

3.1 Simetrías clásicas

En primer lugar, para aplicar el método clásico de Lie a la ecuación

$$\Delta \equiv u_{xx} + cu_{xxt} - g(u)_{tt} \tag{3.2}$$

se considera el generador infinitesimal de un grupo de simetrías de la forma

$$\mathrm{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

y se impone que deje invariante a la ecuación 3.2.

Igualando a cero los coeficientes de las respectivas derivadas de u se obtiene el sistema de ecuaciones determinantes lineales, de donde se trata de obtener $\xi = \xi(x,t,u), \tau = \tau(x,t,u)$ y $\phi = \phi(x,t,u)$. Por lo tanto, ξ, τ, ϕ y g deben verificar las siguientes 12 ecuaciones:

$$\tau_u = 0 \tag{3.3}$$
$$\tau_x = 0 \tag{3.4}$$
$$\xi_u = 0 \tag{3.5}$$
$$\xi_t = 0 \tag{3.6}$$
$$\phi_{uu} = 0 \tag{3.7}$$
$$c(\phi_{tu}) + \tau_t = 0 \tag{3.8}$$
$$2(\phi_{ux}) - \xi_{xx} = 0 \tag{3.9}$$
$$(g_{uu})\phi - (\tau_t)g_u + 2(\xi_x)g_u = 0 \tag{3.10}$$
$$2(\phi_{ux}) + 2c(\phi_{tux}) - \xi_{xx} = 0 \tag{3.11}$$
$$\phi_{xx} + g_u(\phi_{tt}) - c(\phi_{txx}) = 0 \tag{3.12}$$
$$g_{uu}(\phi_u) + (g_{uuu})\phi - (\tau_t)g_{uu} + 2(\xi_x)g_{uu} = 0 \tag{3.13}$$
$$-c(\phi_{uxx}) + 2g_u(\phi_{tu}) + 2g_{uu}(\phi_t) - (\tau_{tt})g_u = 0 \tag{3.14}$$

De 3.3-3.7 se deduce que $\tau(t)$, $\xi(x)$ y $\phi(x,t,u) = p_1 u + p_2$, donde $p_1 = p_1(x,t)$ y $p_2 = p_2(x,t)$. Se evalúa el sistema obtenido y se deduce que $p_1 = r_1 + \frac{\xi_x}{2}$, con $r_1 = k_1 - \frac{\tau}{c}$, donde $k_1 \in \mathbb{R}$. De esta forma se ha reducido el sistema 3.3-3.14 al siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2c(g_{uu})k_1u - 2\tau(g_{uu})u + c(\xi_x)(g_{uu})u + 2c(g_{uu})p_2 & \\
-2c(\tau_t)(g_u) + 4c(\xi_x)(g_u) &= 0 \\
-2(\tau_{tt})(g_u)u - c(\xi_{xxx})u - 2c(p_{2_{xx}}) + 2c(g_u)(p_{2_{tt}}) - 2c^2(p_{2_{txx}}) &= 0 \\
2c(g_{uuu})k_1u - 2\tau(g_{uuu})u + c(\xi_x)(g_{uuu})u + 2c(g_{uuu})p_2 & \qquad (3.15) \\
+2c(g_{uu})k_1 - 2c(\tau_t)(g_{uu}) - 2\tau(g_{uu}) + 5c(\xi_x)(g_{uu}) &= 0 \\
4(\tau_t)(g_{uu})u - 4c(g_{uu})(p_{2_t}) + 2c(\tau_{tt})(g_u) + 4(\tau_t)(g_u) + c^2(\xi_{xxx}) &= 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.15 se llega en función de la expresión de g a los siguientes casos:

Caso 1. Para $g(u)$ arbitraria, se tienen los siguientes infinitesimales:

$$\xi = k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R},$$

$$\tau = k_2, \quad k_2 \in \mathbb{R},$$

$$\phi = 0.$$

Luego, los generadores infinitesimales son

$$\mathrm{v}_1 = \partial_x, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_t.$$

Caso 2. Para $g(u) = (au + b)^n$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 1$, de la misma forma se obtienen los infinitesimales

$$\xi = k_1x + k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

$$\tau = k_3, \quad k_3 \in \mathbb{R},$$

$$\phi = -\frac{2k_1}{a(n-1)}(au + b).$$

Luego, además de v_1 y v_2, los generadores infinitesimales son

$$\mathrm{v}_1, \quad \mathrm{v}_2, \quad \mathrm{v}_3 = x\partial_x - \frac{2}{a(n-1)}(au + b)\partial_u.$$

$g(u)$	Generador infinitesimal
arbitraria	$v_1 = \partial_x, \quad v_2 = \partial_t$
$(au+b)^n$	$v_1, \quad v_2, \quad v_3 = x\partial_x - \dfrac{2}{a(n-1)}(au+b)\partial_u$

Tabla 3.1: Simetrías obtenidas de la ecuación 3.2.

3.2 Sistemas óptimos

En esta sección se van a estudiar los sistemas óptimos de los casos estudiados anteriormente, con el fin de obtener las subálgebras unidimensionales. En primer lugar, se calcula la tabla de conmutadores, donde la operación utilizada es el corchete de Lie que, como se ha descrito en 2.3.2, se define de la siguiente forma:

$$[v_i, v_j] = v_i(v_j) - v_j(v_i). \tag{3.16}$$

Posteriormente, se construye la tabla de la representación adjunta calculando los elementos de la tabla mediante la expresión

$$Ad(exp(\epsilon v_i))v_j = v_j - \epsilon[v_i, v_j] + \frac{\epsilon^2}{2!}[v_i,[v_i,v_j]] - \frac{\epsilon^3}{3!}[v_i,[v_i,[v_i,v_j]]] + ... \tag{3.17}$$

Caso 1. Si $g(u)$ es función arbitraria, la única simetría es la generada por

$$v_1 + v_2.$$

Caso 2. Para $g(u) = (au+b)^n$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, y $n \in \mathbb{Z}$, con $n > 1$, utilizando 3.16 se tiene la tabla de conmutadores 3.2.

Ahora, haciendo uso de la expresión 3.17 se tiene la tabla adjunta 3.3.

Sea un campo vectorial de la forma general $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$, con $v \neq 0$.

- Si $a_i \neq 0$, se hace actuar sobre v el $Ad(exp(\varepsilon v_1))$ y así se anula el coeficiente de v_1.

$$Ad(exp(\varepsilon v_1))v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3(v_3 - \varepsilon v_1) = (a_1 - \varepsilon a_3)v_1 + a_2v_2 + a_3v_3.$$

$[\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j]$	v_1	v_2	v_3
v_1	0	0	v_1
v_2	0	0	0
v_3	$-\mathrm{v}_1$	0	0

Tabla 3.2: Tabla de conmutadores del álgebra de Lie para $g(u) = (au + b)^n$.

$Ad(exp(\varepsilon v_i))v_j$	v_1	v_2	v_3
v_1	v_1	v_2	$\mathrm{v}_3 - \varepsilon \mathrm{v}_1$
v_2	v_1	v_2	v_3
v_3	$e^{\varepsilon}\mathrm{v}_1$	v_2	v_3

Tabla 3.3: Tabla adjunta del álgebra de Lie para $g(u) = (au + b)^n$.

Tomando $\varepsilon = \dfrac{a_1}{a_3}$, se tiene

$$Ad(exp(\varepsilon \mathrm{v}_1))\mathrm{v} = a_2\mathrm{v}_2 + a_3\mathrm{v}_3.$$

Por lo tanto, toda subálgebra unidimensional generada por v, con $a_i \neq 0$, es equivalente a la subálgebra generada por $\lambda \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $a_3 = 0$, se obtiene $\lambda \mathrm{v}_1 + \mu \mathrm{v}_2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, se ha encontrado un sistema óptimo de subálgebras unidimensionales dado por $\{< \lambda \mathrm{v}_1 + \mu \mathrm{v}_2 >, < \lambda \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 >: \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

3.3 Reducciones

En esta sección se va a sustituir los infinitesimales de cada una de las subálgebras de los sistemas óptimos en la ecuación característica

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\phi}. \tag{3.18}$$

Entonces, integrando la ecuación característica 3.18 se obtienen las variables y las soluciones de similaridad.

Se procede a calcular las variables de similaridad para cada una de las subálgebras calculadas anteriormente.

- Para el subálgebra $\lambda \mathrm{v}_1 + \mu \mathrm{v}_2$ se sustituyen los infinitesimales del generador

$$\lambda \mathrm{v}_1 + \mu \mathrm{v}_2 = \lambda \partial_x + \mu \partial_t$$

en la ecuación característica 3.18 y se obtiene

$$\frac{dx}{\lambda} = \frac{dt}{\mu}.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos la variable de similaridad

$$z = \mu x - \lambda t$$

y la solución de similaridad

$$u = h(z).$$

Estas variables de similaridad reducen la ecuación en la siguiente EDO:

$$-\lambda\, c\, \mu^2 h_{zzz} + \mu^2 h_{zz} - \lambda^2\, g_h\, h_{zz} - \lambda^2\, g_{hh}\, (h_z)^2 = 0. \tag{3.19}$$

- Para el subálgebra $\lambda \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3$ se sustituyen los infinitesimales del generador

$$\lambda \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 = \lambda \partial_t + x \partial_x - \frac{2}{a(n-1)}(au + b)\partial_u$$

en la ecuación característica 3.18 y se obtiene

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\lambda} = \frac{du}{-\frac{2}{a(n-1)}(au+b)}.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene la variable de similaridad

$$z = \frac{1}{x} e^{t/\lambda}$$

y la solución de similaridad

$$u = e^{\frac{-2t}{\lambda(n-1)}} h(z) - \frac{b}{a}.$$

Estas variables de similaridad reducen la ecuación en una EDO. Para $n = 3$ la EDO es la siguiente:

$$\begin{aligned} &4\,h^2\,(\lambda\,c\,h_{z\,z\,z}\,z^5 + 3\,\lambda\,c\,h_{z\,z}\,z^4 + \lambda^2\,h_{z\,z}\,z^4 + 2\,\lambda^2\,h_z\,z^3 - 3\,a^3\,h^2\,h_{z\,z}\,z^2 \\ &- 6\,a^3\,h\,\left(h_z\right)^2\,z^2 + 15\,a^3\,h^2\,h_z\,z - 9\,a^3\,h^3) = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4 Soluciones de tipo onda viajera

En las EDPs lineales y no lineales juega un papel muy importante la propagación de onda. Una onda es una función que parte de un medio hacia otra parte con una velocidad de propagación. Hay muchos áreas donde la propagación de una onda tiene una gran importancia.

La expresión más simple de una onda matemática es una función de la forma

$$u(x,t) = f(x - \lambda t), \quad \lambda > 0.$$

En $t = 0$ la onda tiene la forma $f(x)$. En tiempo t se tiene $f(x - \lambda t)$, donde λ representa la velocidad de la onda.

• Partiendo de distintas expresiones de g, se procede a hallar soluciones.

Caso cuadrático. Para este caso tomamos $g(u)$ de la siguiente forma:

$$g(u) = g'(0)u + \frac{1}{2}g''(0)u^2.$$

Aplicando transformaciones llegamos a la ecuación diferencial de Riccati

$$u' = a_2 u^2 + a_1 u + a_0, \tag{3.21}$$

donde a_0, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$, son constantes.

Esta se reduce a una ecuación diferencial de Bernoulli y así es posible encontrar soluciones explícitas.

Luego, 3.21 toma la forma

$$u' = a_2 u(1-u),$$

que admite las únicas dos soluciones de equilibrio $u = 0$ y $u = 1$.

Entonces, se tiene la solución explícita

$$u(\xi) = (1 + exp(a_2\xi))^{-1}.$$

Caso cúbico. Para este caso se asume que

$$g(u) = g'(0)u + \frac{1}{2}g''(0)u^2 + \frac{1}{6}g'''(0)u^3. \tag{3.22}$$

A partir de 3.22, se llega a la ecuación diferencial

$$u' = au(1-u)(u+b) \tag{3.23}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$, son constantes.

La ecuación 3.23 admite las siguientes tres soluciones de equilibrio:

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = -b.$$

Resolviendo la ecuación diferencial 3.23 se obtiene la solución implícita

$$\frac{u^{1+b}}{(1-u)^b(u+b)} = \frac{1}{1+2b} exp(b(1+b)a\xi).$$

No obstante, si tomamos $u''(0) = 0$, es posible obtener la siguiente solución explícita de la implícita:

$$u(\xi) = \frac{exp(a\xi)}{(3 + exp(2a\xi))^{1/2}}.$$

• Por otro lado, haciendo uso de los softwares Mathematica y Maple, se resuelve la EDP 3.1 tomando g como una función cuadrática y se obtiene la solución

$$u(x,t) = -\frac{-c_1^2 + 3c_2^2 + 2cc_1^2 c_2 \tanh(xc_1 + tc_2 + c_3)}{4c_2^2},$$

donde $c, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, con $c > 0$.

Tomando $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$ y $c = 4$, se tiene

$$u(x,t) = \frac{1}{4}(-2 - 8\tanh(2 + t + x)),$$

cuya representación se puede ver en la figura 3.1.

Ahora, se van a definir algunas funciones especiales que aparecerán más adelante. Se puede encontrar más información acerca de ellas en [10].

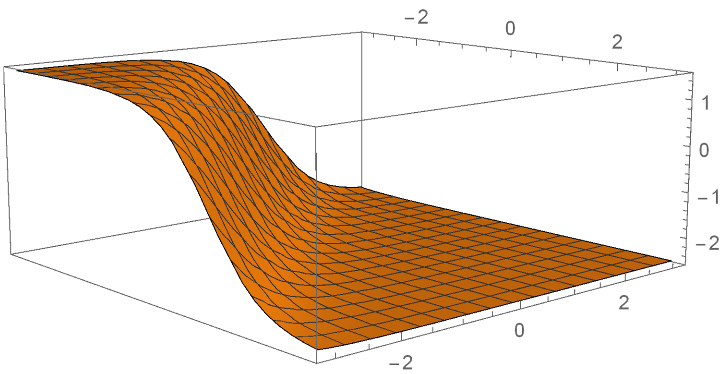

Figura 3.1: Representación gráfica de la solución de la ecuación 1.1 para $g(u) = 2u^2+3u+1$.

Definición 3.1. La función de Airy, $Ai(x)$, es una función especial, llamada así por el astrónomo británico George Biddell Airy (1801-1892). La función $Ai(x)$ y la función relacionada $Bi(x)$, también llamada a veces función de Airy, son soluciones linealmente independientes de la EDO

$$y_{xx} - xy = 0. \tag{3.24}$$

Esta ecuación diferencial recibe el nombre de ecuación de Airy o ecuación de Stokes. Es la ecuación diferencial lineal de segundo orden más simple que posee, como podemos ver en la figura 3.2, un punto donde la solución pasa de tener un comportamiento oscilatorio a un crecimiento exponencial.

Para valores reales de x, la función Airy está definida por la integral

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\, dt.$$

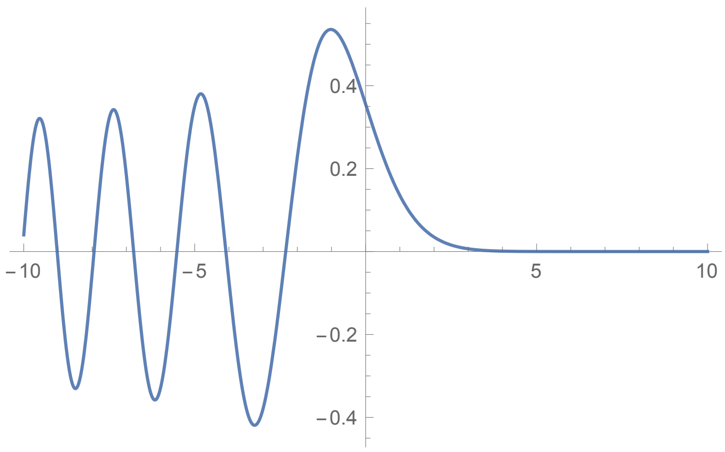

Figura 3.2: Representación gráfica de la función Airy, $Ai(x)$.

La ecuación diferencial 3.24 tiene dos soluciones linealmente independientes. La elección estándar para la otra solución es la función de Airy del segundo tipo, llamada $Bi(x)$.

Definición 3.2. Se define la función $Bi(x)$ como la solución de la ecuación diferencial 3.24 y, como podemos ver en la figura 3.3, tiene la misma amplitud de oscilación que $Ai(x)$ a medida que x tiende a $-\infty$ y tiene un desfasamiento de $\pi/2$. Su expresión es

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\exp\left(-\tfrac{1}{3}t^3 + xt\right) + \sin\left(\tfrac{1}{3}t^3 + xt\right)\right] dt.$$

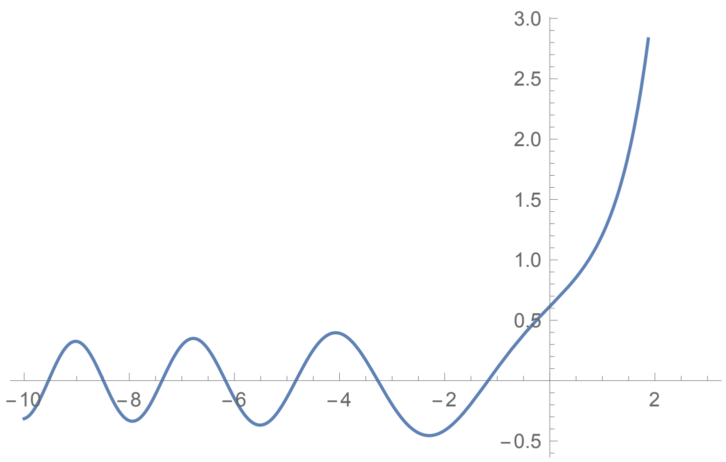

Figura 3.3: Representación gráfica de la función Airy, $Bi(x)$.

Ahora bien, resolviendo la EDO 3.19, con $\lambda = 1$, $\mu = 1$ y $c = 4$, se obtiene

$$h(z) = -\frac{1}{2} + \frac{2^{2/3}\left(3AiryAiPrime\left(\dfrac{-15+8z}{8\times 2^{1/3}}\right) + AiryBiPrime\left(\dfrac{-15+8z}{8\times 2^{1/3}}\right)\right)}{3AiryAi\left(\dfrac{-15+8z}{8\times 2^{1/3}}\right) + AiryBi\left(\dfrac{-15+8z}{8\times 2^{1/3}}\right)},$$

donde $AiryAiPrime(z)$ y $AiryBiPrime(z)$ son las funciones derivadas de $AiryAi(z)$ y $AiryBi(z)$, respectivamente.

• Se parte de la EDO 3.19 y ahora se sigue un procedimiento distinto de los anteriores. Dada una función h se trata de hallar la función g que verifique la EDO 3.19.

En este caso se va a tratar con una función especial denominada la función elíptica de Jacobi senoidal. Las funciones de Jacobi permiten obtener soluciones a muchos problemas físicos. Entre los más conocidos se puede mencionar la descripción del movimiento del péndulo simple. Se puede ver más información acerca de esta función en [10].

En primer lugar, integrando con respecto a z la EDO 3.19, se tiene

$$\lambda\mu^2 ch''(z) - \mu^2 h'(z) + \lambda^2(g_h(h)h'(z)) + A = 0. \tag{3.25}$$

Supongamos $h(z) = p\, jacobi\_sn^q\,(z, m)$. Sustituyendo la función h en la EDO 3.25 se obtiene que la derivada de la función g es

$$g'(h) = t_1 h^{n/4-1} + t_2 h^{n/4} + t_3 h^{3n/4} + t_4 h^{-n/4} + \frac{\mu^2}{\lambda^2},$$

donde

$$t_1 = -\frac{n\, p^{\frac{n}{4}}\, A}{4\,\lambda^2 \sqrt{p^{\frac{n}{4}} - h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{4}} + h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{2}} - h^{\frac{n}{2}}\, m}},$$

$$t_2 = \frac{4\, c\, (m+1)\, \mu^2\, p^{\frac{n}{4}}}{\lambda\, n \sqrt{p^{\frac{n}{4}} - h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{4}} + h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{2}} - h^{\frac{n}{2}}\, m}},$$

$$t_3 = -\frac{c\, m\, \mu^2\, (n+4)}{\lambda\, n\, p^{\frac{n}{4}} \sqrt{p^{\frac{n}{4}} - h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{4}} + h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{2}} - h^{\frac{n}{2}}\, m}},$$

$$t_4 = \frac{c\, \mu^2\, (n-4)\, p^{\frac{3n}{4}}}{\lambda\, n \sqrt{p^{\frac{n}{4}} - h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{4}} + h^{\frac{n}{4}}}\, \sqrt{p^{\frac{n}{2}} - h^{\frac{n}{2}}\, m}}.$$

CAPITULO

4

Conclusiones

Una vez que se ha desarrollado este análisis a la ecuación 1.1, se puede llegar a ciertas conclusiones.

La ecuación en derivadas parciales no lineal 1.1 describe el comportamiento del medio viscoelástico unidimensional. En [5] se centra en un modelo concreto conocido como de deformación limitada introducido por Rajagopal. En él se ha centrado en soluciones de tipo onda viajera que también han sido analizadas en este trabajo.

Como se ha comentado, en particular, la ecuación 1.1 describe el comportamiento del medio viscoelástico. Por ello, en el capítulo 1 se han introducido las bases que permiten conocer el comportamiento que describe.

No se puede negar la importante base matemática que hay detrás de este tema. La teoría de los grupos de Lie nos permite dar soluciones de EDOs y EDPs. Actualmente, no sólo se aplica en matemáticas, sino que cada vez es mayor su uso en la física teórica, en la teoría moderna de cuerdas y en óptica, constituyendo una importante aproximación a la unificación de la mecánica cuántica y la relatividad general. Por ello, se dedica el capítulo 2 a esta amplia teoría. En el capítulo 2 se ven los conceptos teóricos fundamentales para entender el método clásico de Lie. Esta teoría destaca porque permite el estudio de ecuaciones que describen comportamientos físicos.

En el capítulo 3 se ha realizado una clasificación completa de los grupos de Lie de la ecuación 1.1. Dentro de este análisis realizado se han distinguido las posibles funciones g que muestran simetrías de interés. En este proceso se han calculado los sistemas óptimos correspondientes para las distintas expresiones de g, se ha conseguido reducir la EDP a una EDO para los distintos casos y finalmente, se han obtenido algunas soluciones exactas. Este tema es muy amplio y además permite reducir el orden de las EDOs, obtener nuevas soluciones a partir de las ya conocidas y encontrar leyes conservativas. Es abundante la bibliografía donde se aplica esta teoría, como en [6], [7].

Por otro lado, no se puede olvidar de que se trata de un método aplicado. No obstante, existen diversos métodos para sacar conclusiones a partir de un modelo matemático descrito por una EDP. Se trata de un tema muy importante, ya que muchos análisis en matemáticas aplicadas parten de un modelo matemático descrito por una o unas ecuaciones diferenciales.

Otras posibles líneas de ampliación son la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones reducidas aplicando métodos directos como el método de expansión $\frac{G}{G'}$. Además, se pueden aplicar métodos de simulaciones numéricas junto con los métodos de simetrías a la ecuación 1.1, y así comparar soluciones numéricas y analíticas. Como última cuestión abierta se pueden buscar leyes conservativas de la ecuación.

Por último, destacar que el interés inicial que tuve hacia este trabajo y no hacia otro fue el interés por los conocimientos que iba a adquirir sobre este método de Lie, aplicado en el trabajo, para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden describir cualquier comportamiento. A partir del trabajo, he descubierto una aplicación más de las matemáticas, en este caso, en campos de la física aunque el trabajo esté realizado desde un punto de vista matemático.

Bibliografía

[1] George W. Bluman and Sukeyuki Kumei. *Symmetries and Differential Equations*. Springer Science+Business Media, LLC, 1989. 10

[2] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, 1986. 10

[3] Peter E. Hydon. *Symmetry Methods for Differential Equations. A Beginner's Guide.* Cambridge University Press, 2000. 10

[4] George W. Bluman and Stephen C. Anco. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Springer, 2002. 10

[5] H.A. Erbay and Y. Sengul. Traveling waves in one-dimensional non-linear models of strain-limiting viscoelasticity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, (77):61–68, 2015. 25, 37

[6] M.L. Gandarias M.S. Bruzon. Symmetry reductions and traveling wave solutions for the krichever-novikov equation. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, (35):869–876, 2012. 25, 38

[7] M.L. Gandarias M.S. Bruzon. Traveling wave solutions for a generalized ostrovsky equation. *Mathematical Methods in Applied Sciences*, (33):0170–4214, 2010. 25, 38

[8] Gerd Baumann. *Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica*. Springer, 2000. 25

[9] Dr. E. Kamke. *Differentialgleichungen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 1977. 25

[10] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 1964. 25, 32, 34

[11] Nail H. Ibragimov. *A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling*. ALGA Publications, 2004. 10

[12] Nihat Ozkaya and Margareta Nordin. *Fundamentals of Biomechanics*. Springer, 1991. 3